数理解析研究所講究録 1325 巻 2003 年 238-243

右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系のナローイングに基づく実効的書換えとその停止性

西田 直樹　酒井 正彦　坂部 俊樹

名古屋大学大学院工学研究科
〒464-8603 名古屋市千種区不老町
nishida@sakabe.nuie.nagoya-u.ac.jp {sakai,sakabe}@nuie.nagoya-u.ac.jp

Narrowing-based Effective Rewriting and its Termination for Term Rewriting Systems with Extra Variables

Naoki NISHIDA　Masahiko SAKAI　Toshiki SAKABE

Graduate School of Engneering, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Japan, 464-8603

概　要

項書換え系 (TRS) の書換え規則に右辺のみに現れる変数を持つことを許す EV-TRS は，その変数に任意の項を代入して書き換えるので，書換え関係が無限分岐となる．さらに，EV-TRS は停止性を持たない．そのため，EV-TRS による書換えは扱われていなかった．そこで，我々は EV-TRS のためシミュレーション手法として，ナローイングを自然に拡張した EV ナローイングを提案し，被定義記号の再帰呼び出しがない EV-TRS の EV ナローイングが停止することを示した [7]．本稿では，依存対を用いた TRS の停止性証明の手法 [1] を EV ナローイングに拡張し，EV ナローイングの停止性を証明する指針を与える．

キーワード　TRS，ナローイング，依存対，余剰変数

1　はじめに

書換え規則の右辺のみに現れる変数を余剰変数 (extra variable) と呼ぶ．余剰変数付き項書換え系 (EV-TRS) は，余剰変数に任意の項を代入して書き換えるので，書換え関係が無限分岐となる．さらに，EV-TRS は停止性を持たない．そのため，計算機上で EV-TRS の任意の書換えをシミュレーションしてすべての正規形を求めることは不可能であり，EV-TRS による書換えは利用されていなかった．しかし，余剰変数に代入する項を適切に選ぶことにより，望ましい正規形が得られる場合がある．例えば，加算，乗算を計算する次の TRS R_1 を考える．

$$
\begin{aligned}
R_1 = \{\, & 0 \times y \to 0, && 0 + y \to y, \\
& x \times 0 \to 0, && s(x) + y \to s(x+y), \\
& s(x) \times s(y) \to s(x \times s(y) + y) && \}
\end{aligned}
$$

この TRS が定義する加算，乗算の逆像を計算する EV-TRS R_2 は次のように生成される [6].

$$
\begin{aligned}
R_2 = \{\, & +^{\#}(y) \to tp_2(0,y), \\
& +^{\#}(s(z)) \to u_1(+^{\#}(z)), \\
& u_1(tp_2(x,y)) \to tp_2(s(x),y), \\
& \times^{\#}(0) \to tp_2(0,y), \quad \times^{\#}(0) \to tp_2(x,0), \\
& \times^{\#}(s(z)) \to u_2(+^{\#}(z)), \\
& u_2(tp_2(w,y)) \to u_3(\times^{\#}(w),y), \\
& u_3(tp_2(x,s(y)),y) \to tp_2(s(x),s(y)), \\
& +^{\#}(x+y) \to tp_2(x,y), \\
& \times^{\#}(x \times y) \to tp_2(x,y) \quad \}
\end{aligned}
$$

乗算すると 4 になる 2 つの正整数を R_2 により計算，すなわち，$\times^{\#}(s^4(0))$ を書き換えることを考える．書き換える際に余剰変数には適当な項 $s^n(0)$ を入れると，その正規形は $tp_2(s(0),s^4(0))$,

$tp_2(s^2(0), s^2(0))$, $tp_2(s^4(0), s(0))$ の解の組を表す3つの項と，u_i を含み解として不適切な項が13個得られ，無限の系列は生成できない．しかし，一般の定義の書換えのままでは計算機上でこのように実行することはできない．

そこで，我々は，ナローイング [4] をEV-TRSへ自然に拡張したEVナローイングを提案し，EVナローイングの任意の1ステップが有限分岐になること，EVナローイングが一般の定義の書換えの拡張であることを示した [7]．そして，EVナローイングの系列に対応した書換え系列が存在すること (健全性)，また，余剰変数から出現した項の部分項では書換えがない書換え系列と右線形なEV-TRSの書換え系列はEVナローイングによりシミュレーションできること (完全性) を示した．さらに，EV-TRSの被定義記号の呼び出し関係を表したTRSが停止するとき，元のEV-TRSのEVナローイングが停止することを証明した．これは，被定義記号の再帰呼び出しがないEV-TRSのEVナローイングが停止することを意味する．

本稿では，依存対を用いたTRSの停止性の証明 [1] をEVナローイングに拡張し，EV-TRSの余剰変数を取り除いて得られたTRSが停止するならば元のEV-TRSにおける基礎項からのEVナローイングが停止することを示す．さらに，任意の項のEVナローイングが停止するための条件も示す．

ナローイングについては多くの研究がされているが，EV-TRS自体はこれまで全く研究が進んでいない．依存対を用いたEVナローイングの停止性証明に関連した研究としては，依存対をナローイング対に拡張したTRSの停止性証明法 [1] があるが，EV-TRSに対してはそのままでは停止性の証明には全く効果がない．

2 準備

本稿は項書換え系の一般的な記法に従う [2]．本節では，本稿における重要な記法のみを説明する．

関数記号の集合，変数の可算無限集合をそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{X}$ とする．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{X}$ の記号から構成される項の集合を $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ で表す．基礎項の集合 $T(\mathcal{F}, \emptyset)$ を単に $T(\mathcal{F})$ と書く．$arity(f)$ は関数記号 f の引数の数を表す．項 t に出現する変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表す．$\mathcal{V}ar(t_1, ..., t_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}ar(t_i)$ とする．項 s, t が同一であるとき $s \equiv t$ と記述する．$top(t)$ は項 t の先頭の記号を表し，$t \equiv f(t_1, ..., t_n)$ ならば $top(t) = f$ である．

項 t のポジションの集合は $\mathcal{O}(t)$ で表す．文脈 C 中の □ のポジションを明記する場合は，$C[, ...,]_{p_1, ..., p_n}$ (ただし，$p_i \in \mathcal{O}(C)$ かつ $C|_{p_i} \equiv \square$) と記述する．$u \trianglelefteq t$ は項 u が項 t の部分項であることを意味する．

代入 σ は $\sigma(x) \not\equiv x$ である変数から項への写像である．σ の定義域，値域はそれぞれ $\mathcal{D}om(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$，$\mathcal{R}an(\sigma) = \{t \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma), x\sigma \equiv t\}$ と定義する．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1, ..., x_n\}$ かつ $\sigma(x_i) \equiv t_i$ のとき，$\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$ と表す．$\mathcal{D}om(\sigma) = \emptyset$，すなわち，恒等代入のときは σ を $\emptyset$ で表す．値域の集合に現れる変数の集合は $\mathcal{VR}an(\sigma) = \bigcup_{t \in \mathcal{R}an(\sigma)} \mathcal{V}ar(t)$ である．代入を表す記号として σ, δ, θ を用いる．$\mathcal{VR}an(\sigma) = \emptyset$ を満たす代入 σ を基礎代入と呼ぶ．代入の定義域は項に自然に拡張され，σ の項 t への適用を $t\sigma$ で表す．$t\sigma$ を t のインスタンスと呼ぶ．σ の定義域に制限 V の付いた代入は，$\sigma|_V = \{x \mapsto t \mid x \in V \cap \mathcal{D}om(\sigma), x\sigma \equiv t\}$ と定義する．また，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\sigma')$ かつ任意の $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について $\sigma(x) \equiv \sigma'(x)$ のとき，$\sigma = \sigma'$ と表す．σ, σ' に対し $\sigma\theta = \sigma'$ を満たす代入 θ が存在するとき，$\sigma \lesssim \sigma'$ と書く．2つの項 s, t に対して $s\sigma \equiv t\sigma'$ を満たす代入の組 (σ, σ') を s と t の単一化子と呼ぶ[1]．また，s と t のすべての単一化子 (θ, θ') に対して，$\sigma \lesssim \theta, \sigma' \lesssim \theta'$ を満たす s と t の単一化子 (σ, σ') を最汎単一化子と呼び，$(\sigma, \sigma') = \mathrm{mgu}(s, t)$ と書く．

$l \to r$ は**書換え規則**と呼ばれる．ここで，$l\ (\notin \mathcal{X})$，r はそれぞれ規則の左辺，右辺と呼ばれる項である．書換え規則は，他の規則と識別できるラベル ρ を付けて $\rho : l \to r$ と書くこともある．規則 ρ の右辺にのみ現れる変数を**余剰変数**と呼び，その集合を $\mathcal{EV}ar(\rho)$ と書く．書換え規則の有限集合 R を**余剰変数付き項書換え系** (EV-TRS) と呼ぶ．すべての書換え規則 $l \to r$ が $\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たすEV-TRSは**項書換え系**である．EV-TRS R から定まる項上の2項関係 $\to_R$ は，$\to_R = \{(C[l\sigma]_p, C[r\sigma]_p) \mid$

---

[1] 一般に，単一化子は2つの項に共通変数がないという条件のもとで1つの代入で定義される．文献 [7] では，ナローイングの際の規則の変数の名前替えを省略するため，および主定理の証明での代入の定義域と代入される項の変数に関する取り扱いを容易にするために2つの代入の組で定義している．よって，本稿もそれに従う．

$\rho : l \to r \in R, C \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{X})\,\}$ と定義され，**書換え関係**と呼ぶ．ポジション p と適用した規則 ρ を明記するときは $s \to_R^{[p,\rho]} t$ と書く．ρ を省略して $s \to_R^p t$ と書いてもよい．$\xrightarrow{*}_R$ は $\to_R$ の推移反射閉包である．$\xrightarrow{n}_R$ は n ステップの書換えを表す．書換え関係によって作られる項の系列を**書換え系列**と呼ぶ．項 t から始まる (R の) 無限の書換え系列が存在しないとき，t は (R に関して) **停止する** (あるいは，**SN** である) という．また，任意の項が R に関して停止するとき，R は**停止する** (SN である) という．EV-TRS R が TRS でないならば，R は SN でない．

R を $\mathcal{F}$ 上の EV-TRS とする．このとき，被定義記号の集合 $\mathcal{D}_R$ は $\{\, top(l) \mid l \to r \in R \,\}$ と定義される．また，構成子の集合 $\mathcal{C}_R$ は $\mathcal{F} - \mathcal{D}_R$ と定義される．

項 s, t が互いにインスタンスであるとき，s と t は **α-合同**であるという．$\to$ を項上の関係とするとき，いかなる項 s についても集合 $\{t \mid s \to t\}$ が α-合同を法として有限であるとき $\to$ は**有限分岐**，そうでないとき**無限分岐**であるという．R が TRS ならば $\to_R$ は有限分岐であるが，EV-TRS のときは一般に無限分岐である．

例 2.1 $R_3 = \{\, \rho_1 : f(x,0) \to x,\ \rho_2 : g(x) \to f(x,y)\,\}$ は EV-TRS である．$g(0)$ は，ρ_2 により，$f(0,0)$, $f(0,s(0))$, $f(0,s(g(s(0)))), \ldots$ など $f(0,t)$ の形 (t は任意の項) をしたどの項にも書き換えることができる．よって，$\to_{R_3}$ は無限分岐である．□

3 EV ナローイング

この節では，EV ナローイングの定義を与え，書換え系列との関係を明らかにする [7].

EV ナローイングの定義は次のようになる．

定義 3.1 R を EV-TRS とする．次のように定義される項上の 2 項関係 $\rightsquigarrow_R$ を **EV ナローイング** (関係) と呼ぶ．

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow_R = \{\, & (C[t], C\delta[r\sigma]) \mid C \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{X}),\\ & t \notin \mathcal{X}, \rho : l \to r \in R, (\delta, \sigma) = \mathrm{mgu}(t, l),\\ & \mathcal{D}om(\delta) \subseteq \mathcal{V}ar(t),\\ & \mathcal{VR}an(\delta) \cap (\mathcal{V}ar(C[t]) - \mathcal{D}om(\delta)) = \emptyset,\\ & (\forall x \in \mathcal{EV}ar(\rho), x\sigma \in \mathcal{X} - \mathcal{V}ar(C[t], t\delta)),\\ & (\forall x, y \in \mathcal{EV}ar(\rho), x \not\equiv y \Rightarrow x\sigma \not\equiv y\sigma) \quad \}\end{aligned}$$

上のように，δ で項 s が項 t に書き換えられるとき $s \underset{\delta}{\rightsquigarrow}_R t$ と書く．また，δ は省略してもよい．□

この定義は，ナローイング [4] の定義に対して余剰変数にはそれまで使われてない新しい変数を代入する条件を追加した自然な拡張である．例 2.1 の R_3 による $g(0)$ の EV ナローイングは

$$g(0) \rightsquigarrow_{R_3} f(0,y) \underset{\{y \mapsto 0\}}{\rightsquigarrow}_{R_3} 0$$

となる．0 ステップの EV ナローイングは $\overset{0}{\underset{\emptyset}{\rightsquigarrow}}_R = \equiv$ と定義し，$n+1$ ステップの EV ナローイングは $\overset{n+1}{\underset{\delta'\delta}{\rightsquigarrow}}_R = \overset{n}{\underset{\delta'}{\rightsquigarrow}}_R \underset{\delta}{\rightsquigarrow}_R$ と定義する．また，$\overset{*}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}_R = \bigcup_{n \geq 0} \overset{n}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}_R$ とする．ポジションと適用した規則を明記するときは $s \underset{\delta}{\rightsquigarrow}_R^{[p,\rho]} t$ と書く．ρ を省略して $s \underset{\delta}{\rightsquigarrow}_R^p t$ と書いてもよい．EV ナローイングにより作られる項の系列を **EVN 系列**，特に，基礎項から始まる EVN 系列を**基礎 EVN 系列**と呼ぶ．

上の定義 3.1 より，EV ナローイングの 1 ステップの書換えが有限分岐であることは明らかである．さらに，TRS R について，基礎項上では $\to_R = \rightsquigarrow_R$ である．一般の書換え $\to_R$ では変数を含む項も対象としているが，書換え系列上に現れる変数は定数とみなしても差し支えない．よって，基礎項の書換え系列を考えるだけで十分である．以降，書換え系列については基礎項上のものだけを考える．

最後に，EVN 系列に対応する書換え系列が存在すること (健全性)，実効的書換え系列と右線形な EV-TRS の書換え系列に対応する EVN 系列が存在すること (完全性) を示す．実効的書換え系列とは，余剰変数から出現した項の部分項では書換えがない書換え系列である．正確な定義は文献 [8] で与えている．定理 3.2,3.3 はナローイングの健全性，完全性を保証する定理 [4] の自然な拡張である．

定理 3.2 ([7]) R を EV-TRS, s を基礎項，t を項とする．このとき，$s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}_R t$ ならば $s\delta \xrightarrow{*}_R t$.　□

定理 3.3 ([7]) R を EV-TRS, s と t を基礎項とする．このとき，$s \xrightarrow{*}_R t$ が実効的ならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\theta$ を満たす項 t' と代入 θ が存在する．□

定理 3.4 ([7]) R を右線形な EV-TRS, s と t を基礎項とする．$s \xrightarrow{*}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\theta$ を満たす線形な項 t' と代入 θ が存在する．□

なお，任意の書換え系列に対応する EVN 系列は存在しない．

4 EVナローイングの停止性

本節では，依存対を用いたTRSの停止性証明の手法 [1] をEVナローイングに拡張し，EVナローイングが停止するかどうかを判定する指針を示す．なお，定理などの証明については文献 [8] を参照されたい．

R をEV-TRS，t を項とする．t からの R による無限のEVN系列が存在しないとき，t は R に関して **EVN-SN** であるという．任意の項が R に関して EVN-SN であるとき，R は **EVN-SN** であるという．さらに，任意の基礎項が R に関して EVN-SN であるとき，R は **EVN-GSN** であるという．EV-TRSの書換え系列をシミュレーションする場合には，基礎項からのEVN系列のみ考えるのでEVN-GSNであればよい．R がEVN-SNならば R はEVN-GSNであるが，この逆は成り立たない．また，R がTRSならば，R がSNであるとき，かつそのときに限り，R はEVN-GSNである．

まずは，依存対を定義する．そのために，$\mathcal{F}$ のそれぞれの被定義記号に対応する $\mathcal{F}$ にない異なる新しい記号を用意する．$f \in \mathcal{D}_R$ に対応する $\mathcal{F}$ にない新しい記号を f の**キャピタル記号**と呼ぶ．本稿では，$\mathcal{F}$ の記号には小文字を用い，$\mathcal{D}_R$ の先頭の記号のみを大文字にした記号をそのキャピタル記号として用いる．例えば，被定義記号 abc のキャピタル記号は Abc となる．$\mathcal{D}_R$ に対するキャピタル記号の集合を $\overline{\mathcal{D}}_R = \{ F \mid f \in \mathcal{D}_R \}$ とする．また，$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{D}}_R$ とする．EV-TRSの依存対はTRSの依存対の定義をそのまま用いる．

定義 4.1 R をEV-TRS，$\rho : f(s_1, ..., s_n) \to r \in R$，$r|_p \equiv g(t_1, ..., t_m)$ かつ $g \in \mathcal{D}_R$ とする．このとき，$\langle F(s_1, ..., s_n), G(t_1, ..., t_m) \rangle$ を R の**依存対**と呼ぶ．R の依存対の集合を $\mathcal{DP}_R$ と記述する． □

例 4.2 次のように定義されるEV-TRSを考える．

$$R_6 = \{\, half(0) \to 0, \qquad a \to half(c(x)), \qquad half(s^2(x)) \to s(half(x)) \,\}$$

$half$ のキャピタル記号を H と省略することとすると，このEV-TRSの依存対は次のようになる．

$$\mathcal{DP}_{R_6} = \{\, \langle H(s^2(x)), H(x) \rangle,\ \langle A, H(c(x)) \rangle \,\} \quad \square$$

依存対 $\langle s, t \rangle$ において，t にしか現れない変数も余剰変数と呼び，その集合を $\mathcal{EV}ar(\langle s, t \rangle)$ で表す．すなわち，$\mathcal{EV}ar(\langle s, t \rangle) = \mathcal{V}ar(t) - \mathcal{V}ar(s)$ である．また，s, t を書換え規則と同様にそれぞれ左辺，右辺と呼ぶ．

次に，R チェーン [1] の定義を次のようにEVナローイングに拡張する．

定義 4.3 R を EV-TRS，$\langle s_i, t_i \rangle \in \mathcal{DP}_R$ $(i > 0)$ とする．このとき，任意の連続した依存対 $\langle s_i, t_i \rangle$，$\langle s_{i+1}, t_{i+1} \rangle$ について $t_i\sigma_i \overset{*}{\rightsquigarrow}_R s'_{i+1}$ (ただし，任意の $x \in \mathcal{EV}ar(\langle s_i, t_i \rangle)$ について $x\sigma_i$ は互いに素な新しい変数とする) かつ $(\delta_i, \sigma_i) = \mathbf{mgu}(s'_i, s_i)$ を満たす $s'_1, s_1, s'_2, s_2, ...,$ の最汎単一化子 $(\delta_1, \sigma_1), (\delta_2, \sigma_2), ...$ が存在するならば，依存対の系列 $\langle s_1, t_1 \rangle \langle s_2, t_2 \rangle \cdots$ を **R EVN チェーン** (単に，**EVN チェーン**) という (図 1)．さらに，$s_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_R s'_1$ かつ $(\delta_1, \sigma_1) = \mathbf{mgu}(s'_1, s_1)$ である基礎項 s_0 が存在するならば，**基礎 R EVN チェーン**といい，$s_0 \langle s_1, t_1 \rangle \langle s_2, t_2 \rangle ...$ と記述する． □

s'_1 が任意の項である場合が R EVN チェーンであり，ある基礎項 s_0 からEVナローイングして到達できる項である場合が基礎 R EVN チェーンである．$top(s_1) = F_1$ とすると，EVNチェーンのみを考える場合には，s'_1 として $F_1(x_{1,1}, ..., x_{1,n_1})$ をとれば十分である．

例 4.4 例4.2の R_6 を考える．次の2つの依存対の系列はそれぞれ，R_6 EVNチェーン，基礎 R_6 EVNチェーンである．

$$\langle H(s^2(x)), H(x) \rangle \langle H(s^2(x)), H(x) \rangle \cdots$$
$$H(s^4(0)) \langle H(s^2(x)), H(x) \rangle \langle H(s^2(x)), H(x) \rangle \quad \square$$

無限の R チェーンが存在しないことが R の停止性を保証する定理 [1] を，EVNチェーンに拡張すると，次のようになる．

定理 4.5 ([8]) R を EV-TRS とする．無限の (基礎) R EVN チェーンが存在しないとき，かつそのときに限り，R はEVN-(G)SNである． □

定理4.5より，EV-TRSのEVN-(G)SNを示すためには無限の (基礎) R EVNチェーンが存在しないことを示す必要がある．しかし，これを示す際の問題点の1つとして，余剰変数が存在するために再帰経路順序 (rpo) などの単純化順序 [2] を用いて規則 $l \to r \in R$ と依存対 $\langle s, t \rangle \in \mathcal{DP}_R$ に対して $l \succsim r$，$s \succ t$ を示せないという問題がある．そこで，TRSの停止性証明にも用いられる切り落とし関数 [1, 5] を利用する．

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \langle\, s_1,\, t_1 \,\rangle & & \langle\, s_2,\, t_2 \,\rangle & & \langle\, s_3,\, t_3 \,\rangle & & \cdots \\
 & {\scriptstyle (\delta_1,\sigma_1) = \mathrm{mgu}(s_1', s_1)} \vdots & & {\scriptstyle (\delta_2,\sigma_2) = \mathrm{mgu}(s_2', s_2)} \vdots & & {\scriptstyle (\delta_3,\sigma_3) = \mathrm{mgu}(s_3', s_3)} \vdots & & \\
\Bigl(T(\overline{\mathcal{F}}) \ni \exists s_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_R \Bigr) s_1' & t_1\sigma_1 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_R \; s_2' & t_2\sigma_2 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_R \; s_3' & t_3\sigma_3 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_R & \cdots
\end{array}
$$

図 1: (基礎) R EVN チェーン.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \langle\, \pi(s_1),\, \pi(t_1) \,\rangle & & \langle\, \pi(s_2),\, \pi(t_2) \,\rangle & & \langle\, \pi(s_3),\, \pi(t_3) \,\rangle & & \cdots \\
 & {\scriptstyle (\theta_1,\sigma_1) = \mathrm{mgu}(s_1', \pi(s_1))} \vdots & & {\scriptstyle (\theta_2,\sigma_2) = \mathrm{mgu}(s_2', \pi(s_2))} \vdots & & {\scriptstyle (\theta_3,\sigma_3) = \mathrm{mgu}(s_3', \pi(s_3))} \vdots & & \\
\Bigl(T(\overline{\mathcal{F}}) \ni \exists s_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_R \Bigr) s_1' & \pi(t_1)\sigma_1 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_{\pi(R)} \; s_2' & \pi(t_2)\sigma_2 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_{\pi(R)} \; s_3' & \pi(t_3)\sigma_3 & \overset{*}{\rightsquigarrow}_{\pi(R)} & \cdots
\end{array}
$$

図 2: (基礎) $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ EVN チェーン.

定義 4.6 関数記号の集合を $\mathcal{F}$ とする．任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$ ($arity(f) = n \geq 0$) について $\pi(f)$ が $\pi(f) = i$ ($1 \leq i \leq n$)，または $\pi(f) = [i_1, \ldots, i_m]$ ($0 \leq m \leq n, 1 \leq i_j \leq n$) と定義される関数 π を**切り落とし関数**と呼ぶ．$\pi(f)$ が定義されていないときは，$\pi(f) = [1, \ldots, n]$ とみなす．また，R の任意の被定義記号 $f \in \mathcal{D}_R$ について，$\pi(f) \neq i$ (すなわち，$\pi(f) = [i_1, \ldots, i_m]$) とする．$\mathcal{F}$ のキャピタル記号についても同様である．π は項に対する関数として，次のように自然に拡張される．

- $\pi(x) = x$. (ただし，$x \in \mathcal{X}$.)
- $\pi(f(t_1, \ldots, t_n)) = \pi(t_i)$. (ただし，$\pi(f) = i$.)
- $\pi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\pi(t_{i_1}), \ldots, \pi(t_{i_m}))$.
  (ただし，$\pi(f) = [i_1, \ldots, i_m]$.)

さらに，EV-TRS R, 依存対 $\mathcal{DP}_R$ に対する関数として，次のように拡張される．

- $\pi(R) = \{\, \pi(l) \to \pi(r) \mid l \to r \in R \,\}$.
- $\pi(\mathcal{DP}_R) = \{\, \langle \pi(s), \pi(t) \rangle \mid \langle s, t \rangle \in \mathcal{DP}_R \,\}$. □

任意の $l \to r \in R$, $\langle s, t \rangle \in \mathcal{DP}_R$ についてそれぞれ $\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$, $\mathcal{V}ar(\pi(s)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t))$ を満たすとき，切り落とし関数 π は $R, \mathcal{DP}_R$ の**余剰変数を切り落とす**という．このような π を発見できれば，$\pi(l) \geq \pi(r)$, $\pi(s) > \pi(t)$ を示すための順序として rpo などを用いられるようになる．

切り落とし関数 π について，定義 4.3 の $R, \mathcal{DP}_R$ をそれぞれ $\pi(R)$, $\pi(\mathcal{DP}_R)$ に置き換えて得られる (基礎)EVN チェーンを (基礎) $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンと呼ぶ (図 2).

EV-TRS R とその依存対の余剰変数を切り落とす π を R, $\mathcal{DP}_R$ に適用すると，すべての基礎 $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンには変数が現れなくなる．このとき，基礎項から始まる $\overset{*}{\rightsquigarrow}_{\pi(R)}$ による EVN 系列は $\overset{*}{\to}_{\pi(R)}$ による書換え系列でもあるので，基礎 $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンは $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ チェーンでもある．$\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ チェーンについては，無限のチェーンが存在するかどうかを TRS と同様の方法 [1] で調べることができる．よって，次の定理が有効となる．

定理 4.7 ([8]) R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．無限の $\pi(R, \mathcal{DP}_R)$ チェーンが存在しないならば，R は EVN-GSN である．さらに，任意の依存対 $\langle s, t \rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\pi(t)$ が基礎項であるならば，R は EVN-SN である． □

例 4.8 例 4.2 の R_6 と依存対 $\mathcal{DP}_{R_6}$ を考える．切り落とし関数 π_6 を c の引数を切り落とす関数，$\pi_6(c) = [\,]$ とする．このとき，π_6 を R_6, $\mathcal{DP}_{R_6}$ に適用すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\pi_6(R_6) = \{\, & \mathit{half}(0) \to 0, \qquad a \to \mathit{half}(c), \\
& \mathit{half}(s^2(x)) \to s(\mathit{half}(x)) \quad \}
\end{aligned}
$$

$$
\pi_6(\mathcal{DP}_{R_6}) = \{\, \langle H(s^2(x)), H(x) \rangle, \langle A, H(c) \rangle \,\}
$$

$A > H$ とすれば，$\mathit{half}(0) \geq 0$, $\mathit{half}(s^2(x)) \geq s(\mathit{half}(x))$, $a \geq \mathit{half}(c)$, $H(s^2(x)) > H(x)$, $A > H(c)$ であるので，無限の $\pi_6(R_6, \mathcal{DP}_{R_6})$ チェーンは存在しない．よって，無限の基礎 R_6 EVN チェーンも存在しないので，R_6 は EVN-GSN である． □

さらに，依存グラフ[1]を使うなら，すべての $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\pi(t)$ が基礎項である必要はなく，すべてのループについて少なくとも1つの $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ の $\pi(t)$ が基礎項であるとすれば十分である．すべての $F \in \overline{D}_R$ について $\pi(F) = [\,]$ とおいて定理4.7を適用すれば，文献[7]で示したEVN-SNの判定方法と同様になる．よって，定理4.7は[7]の結果を含む．また，TRS R がEVN-SNであることと R のナローイングが停止することは等価であることは，定義より明らかである．よって，定理4.7はTRSのナローイングが停止するかを証明することにも利用できる．

より簡単にEVN-(G)SNであるか判定する方法として，$\pi(\mathcal{DP}_R) = \mathcal{DP}_{\pi(R)}$ のときはTRS $\pi(R)$ の停止性を調べればよい．

系 4.9 R を $\mathcal{F}$ 上のEV-TRS，π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とし，$\pi(\mathcal{DP}_R) = \mathcal{DP}_{\pi(R)}$ を満たす切り落とし関数とする．$\pi(R)$ がSNならば，R はEVN-GSNである．さらに，任意の規則 $l \to r \in R$ について先頭が被定義記号である $\pi(r)$ のすべての部分項が基礎項ならば，R はEVN-SNである．□

文献[8]の命題4.18と定理4.19は間違っていた．これは命題4.18[8]が成り立たない場合があるからである．しかし，$\pi(\mathcal{DP}_R) = \mathcal{DP}_{\pi(R)}$ が成り立つときは定理4.19[8]は成り立つ．上の系4.9は定理4.19[8]を修正したものである．

5 まとめ

本稿では，文献[7]で提案したEVナローイングについて,，依存対によるTRSの停止性証明をEVナローイングに拡張した．

$+^{\#}(s^n(0))$ と $\times^{\#}(s^n(0))$ がEVN-SNであることは帰納法を用いて証明できる．このように，項がEVN-SNであることを証明するための一般的な証明手法を考案することが今後の課題である．また，EVナローイングを条件付き項書換え系へ拡張したい．

謝 辞 本研究は一部，日本学術振興会科学研究費基盤(c)11680352，名古屋大学21世紀COE (IMI)，柏森情報科学振興財団の補助を受けている．

参考文献

[1] Arts,T. and Giesl,J.: Termination of Term Rewriting Using Dependency Pairs. *TCS*, vol.236, pp.133–178, 2000.

[2] Baader,F. and Nipkow,T.: *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

[3] Huet,G. and Lèvy,J.-J.: Computations in Orthogonal Rewriting Systems, I. In Computational Logic: Essays in Honor of Alan Robinson, pp.395–414, MIT Press, 1991.

[4] Hullot,J.M.: Canonical Forms and Unification. In Proceedings of the 5th International Conference on Automated Deduction, LNCS 87, pp.318–334, 1980.

[5] Kusakari,K., Nakamura,M. and Toyama,Y.: Argument Filtering Transformation. In Proceedings of PPDP'99, LNCS 1702, pp.47–61, 1999.

[6] 西田, 酒井, 坂部: 指定した引数を固定した逆関数を定義するTRSの生成. 信学技報, COMP 2001-67 (2001-12), pp.33–40, 2001.

[7] 西田, 酒井, 坂部: 右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系の計算モデル. 日本ソフトウェア科学会第19回大会論文集, 2002.

[8] 西田, 酒井, 坂部: 右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系のナローイングに基づく実効的書換えとその停止性. 信学技報, COMP 2002-68 (2003-01), pp.45–52, 2003.